Pays : Burkina Faso	Année : 2014	Session : normale, 1er Tour
Série : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\ \vec{v})$; unité : 2 cm.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = -\dfrac{1}{z}$.

F est l'application du plan P privé de O dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

1. On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exprimer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ.

2. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$, où Z est l'affixe du milieu I du segment [MM'] ; x, y, X, Y sont des nombres réels.

a) Exprimer X et Y à l'aide de x et y.

b) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O\,;\vec{u})$.

c) Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O\,;\vec{v})$.

3. On suppose que $|z| = 1$. On pose $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Calculer Z en fonction de θ.

b) Caractériser géométriquement la restriction de F au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 2

A l'instant $t = 0$, un corps à la température $\theta_0 = 60$°C est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1 = 20$°C. Au bout de 10 minutes, la température du corps est 50°C. Sa température à la date t exprimée en minutes, est solution de l'équation différentielle : $\dfrac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$, où k est une constante réelle.

On pose : $\phi = \theta(t) - \theta_1$.

1. *a*) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par ϕ ?

b) Déterminer ϕ.

c) En déduire $\theta(t)$ en fonction de k.

d) Déterminer la constante k puis, en déduire l'expression définitive de $\theta(t)$.

2. *a*) Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?

b) Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?

On donne : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx -0,29$.

Problème

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-x)e^x \text{ si } x \leq 1\,;$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \text{ si } x < 1.$$

On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal direct

$R = \left(O\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A

1. *a*) Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

b) f est-elle dérivable en $x_0 = 1$? Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2. *a*) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Soit f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f'.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse -1.

(On donne : $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}36$.)

5. Tracer (Δ), (T) et ($\mathscr{C}$).

6. *a*) Montrer que la restriction de f à $]1\,;+\infty[$ réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) On note ($\mathscr{C}$') la courbe représentative de cette bijection réciproque dans le repère R. Construire ($\mathscr{C}$').

Partie B

1. Soit α un réel strictement négatif.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} xe^{x}dx$.

b) On désigne par D_α le domaine plan délimité par ($\mathscr{C}$), (Ox) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

Calculer, en cm^2, la valeur de l'aire A(α) du domaine D_α.

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$.

2. *a*) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \to (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.

b) Calculer, en cm^3, le volume V(α) du solide S(α) engendré par la rotation complète du domaine D_α autour de l'axe (Ox).

Partie C

On considère la courbe (E) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{\cos t} - 1 \\ y(t) = 2\tan t \end{cases},\ t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[.$$

1. Donner une équation cartésienne de (E).

2. En déduire que (E) est une partie de ($\mathscr{C}$) que l'on précisera.