Pays : Burkina Faso	**Année** : 2017	**Épreuve** : Maths
Examen : BAC, Session normale, 2e Tour, Séries C - E	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 6

EXERCICE 1 (03 *points*)

Soit ABC un triangle isocèle du plan tel que : AB = AC. On note K le milieu du segment [BC].

On donne : AK = 8 cm ; BC = 4 cm.

1. On note G le barycentre du système { (A, 2) ; (B, 1) ; (C, 1) }.

Déterminer et construire le point G.

2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$.

3. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que :

$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0$.

EXERCICE 2 (05 *points*)

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On note *f*, l'application du plan (P) privé du point O dans (P), qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de *z*.

1. *a*) Vérifier que : $z' = \frac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ est le module de *z*.

b) Montrer que O, M et M' sont alignés.

2. *a*) Déterminer (Γ) l'ensemble des points invariants par *f*.

b) Vérifier que (Γ) contient les points A et B d'affixes respectives - 1 et *i*.

3. Soit (C) le cercle de diamètre [AB], E le milieu de [AB] et E' = *f*(E).

a) Déterminer une équation de (C).

b) Montrer que E' appartient à (C).

4. Le point M d'affixe *z* étant un point quelconque de la droite (AB), on veut construire son image M' par *f*.

a) Déterminer une équation de la droite (AB).

b) On pose : $k = OM^2$, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' des nombres réels.

Exprimer *k* en fonction de *x*, puis montrer que M' appartient à (C).

(Exprimer x' et y' en fonction de x et k).

c) Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

PROBLÈME (12 *points*)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1-|\ln x|}, si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A (06,25 *points*)

1. *a*) Déterminer l'ensemble de définition D de *f*.

b) Comparer, pour tout réel non nul *x* de D, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et *f*(*x*).

2. *a*) Montrer que *f* est continue en 0.

b) Étudier la dérivabilité de *f* en 0 et en 1.

Donner les conséquences graphiques pour (C).

3. *a*) Calculer les limites de *f* aux bornes de D.

(*On pourra utiliser la comparaison faite en **1.** b*).

b) Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe (C).

4. *a*) Déterminer les intervalles de dérivabilité de *f*.

b) Montrer que : $f'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f'(x)$. (*On pourra utiliser **1.** b*).

En déduire que les tangentes à (C) aux points d'abscisses $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se coupent au point d'abscisse $\frac{f(\sqrt{3})}{f'(\sqrt{3})}$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout réel non nul *x* de D.

En déduire le sens de variations, puis dresser le tableau de variations de *f*.

5. Construire la courbe (C).

Partie B (02 *points*)

1. Résoudre et discuter, dans $\mathbb{R}$, l'équation *f*(*x*) = *m* où *m* est un paramètre réel.

2. Soit *g* la restriction de *f* à l'intervalle I = $]\frac{1}{e}\,;e[$.

a) Montrer que *g* établit une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Expliciter la bijection réciproque g^{-1} de *g*.
c) Construire la courbe représentative (C') de *g* dans le même repère que (C).

Partie C (03,75 *points*)

1. Pour tout réel x > e, on définit pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{lnx} + \frac{1}{ln^2(x)} - \frac{1}{ln^3(x)} + \cdots + \frac{(-1)^n}{ln^n(x)}.$$

Calculer, en justifiant son existence, la limite de (u_n).

2. Pour tout réel $x > \frac{1}{e}$, on définit la fonction F par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{lnt}{1+lnt} dt$.

(*On ne demande pas de calculer F(x)*).

a) Justifier l'existence de F(x).

b) Montrer que F est dérivable sur $]\frac{1}{e}\,; +\infty[$ et que $F'(x) = 2h(2x) - h(x)$ où h est la fonction définie sur $]\frac{1}{e}\,; +\infty[$ par $h(x) = \frac{lnx}{1+\ln x}$.

c) Montrer que F est croissante.

3. *a*) Montrer que pour $x \geq 1$, $\frac{xlnx}{1+\ln(2x)} \leq F(x) \leq \frac{xln(2x)}{1+lnx}$.

b) En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de F(x) et de $\frac{F(x)}{x}$.

c) Montrer que : $F(x) - x \leq \frac{x(ln2-1)}{1+lnx}$.

En déduire que (C) admet une branche parabolique.

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère (Γ) définie paramétriquement par le système :

$$\begin{cases} x = -e^{-t} \\ y = \frac{t}{1+t}, \quad t \leq 0 \end{cases}$$

a) Déterminer l'équation cartésienne de (Γ).

b) Montrer que (Γ) s'obtient à partir de (C) par une transformation que l'on précisera.