

Pays : Burkina Faso	Année : 2017	Épreuve : Maths
Examen : BAC, Session normale, 1 ^{er} Tour, Série D	Durée : 4 h	Coefficient : 5

EXERCICE 1 (04 points)

1. a) Écrire sous la forme algébrique le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^2$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 2z + 19 - 18i\sqrt{3} = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1^2 - z_2^2 = -4 + \frac{4i\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d telles que : $a = 2 + 3i\sqrt{3}$; $b = \frac{1}{9}(\bar{a} - 2)$; $c = -a - 2$ et $d = a - b + c$ (où \bar{a} est le conjugué de a).

a) Déterminer les nombres complexes b, c et d puis placer les points A, B, C et D dans le plan complexe. Unité graphique : 2 cm. On donne : $\sqrt{3} = 1,7$.

b) Comparer $a + c$ et $b + d$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

c) Calculer et interpréter géométriquement un argument du nombre complexe $Z = \frac{c-a}{d-b}$.

Préciser alors la nature exacte de ABCD.

EXERCICE 2 (04 points)

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Les nombres portés par ces 3 boules sont tous des nombres premiers. »

B : « Les nombres portés par ces 3 boules sont tous divisibles par 3. »

C : « Deux boules portent un numéro divisible par 3. »

D : « Les trois numéros sont des multiples de 2. »

E : « Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3. »

F : « Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés forment trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. »

PROBLÈME (12 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{3-x} + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ f(x) = e^{3-x} + x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (10 points)

1. a) Étudier la continuité de f en 3.

b) Étudier la dérivabilité de f en 3 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Préciser la position de (C) par rapport à (D) dans $]3 ; +\infty[$.

b) Étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ sur $[0 ; 2]$.

4. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 3$ et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

5. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une unique solution α . Vérifier que : $-1 < \alpha < 0$.

b) Construire la courbe (C), les droites (D) et (Δ), et les demi-tangentes au point d'abscisse 3 de (C).

Partie B (02 points)

1. Calculer l'aire \mathcal{A} en cm^2 , de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

2. On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - e^{2t} \\ y(t) = 3e^t - e^{3t} + 1, t \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera.