

<b>Pays</b> : Burkina Faso	<b>Année</b> : 2017	<b>Épreuve</b> : Maths
<b>Examen</b> : BAC, Remplacement, 1 <sup>er</sup> Tour, Série D	<b>Durée</b> : 4 h	<b>Coefficient</b> : 5

### EXERCICE 1 (04 points)

1. a) Déterminer le nombre complexe  $\alpha$  tel que :  $\alpha(1+i) = 1+3i$  puis calculer  $i\alpha^2$ .

b) Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose :  $f(z) = z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i$ .

Montrer que  $f(z)$  peut se mettre sous la forme  $(z-\alpha)(z-i\alpha)$ .

En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation :  $f(z) = 0$ .

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :  $a = 2+i$  et  $b = -1+2i$ .

a) Placer les points A et B dans le repère.

La figure sera complétée au fur et à mesure.

b) Vérifier que  $b = ia$  et en déduire la nature exacte du triangle OAB.

c) C est le point d'affixe  $c = 1 + \frac{1}{2}i$ .

Déterminer l'affixe  $d$  du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que :  $\text{mes}(\widehat{OC, OD}) = \frac{\pi}{2}$ .

d) On note J, K, L et M les milieux respectifs des segments [AB], [DA], [CD] et [BC].

Déterminer la nature exacte du quadrilatère JKLM. Justifier.

### EXERCICE 2 (04 points)

Un jeu consiste à lancer quatre fois de suite, une pièce de monnaie bien équilibrée dont l'une des faces est notée F (Face) et l'autre P (Pile). On lit sur la face supérieure de la pièce. Si l'on obtient F alors on gagne 2 points, si l'on obtient P alors on perd 1 point.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de points obtenus à l'issue des quatre lancers.

1. a) Déterminer l'univers  $\Omega$  associé. (On pourra s'aider d'un arbre).

b) Calculer la probabilité d'obtenir 3 fois F (Face).

2. a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir des points strictement inférieurs à 8 ?

d) Déterminer la probabilité  $p'$  que la variable aléatoire X prenne une valeur strictement comprise entre -3 et 7.

3. a) Calculer l'espérance mathématique de X.

Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

b) Calculer la variance  $V(X)$  et l'écart-type  $\sigma(X)$  de X.

**PROBLÈME (12 points)**

**Partie A (02,5 points)**

1. Soit la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = xe^x$ .

Étudier le sens de variations de  $u$  et en déduire que pour tout réel  $x$ , on a :  $xe^x \geq -\frac{1}{e}$ .

2. Soit la fonction  $g$  définie sur  $]-\infty ; 0]$  par :  $g(x) = 1 - (x^2 + x + 1)e^x$ .

a) Étudier le sens de variations de  $g$ , puis dresser son tableau de variations.

(On ne demande pas la limite de  $g$  en  $-\infty$ ).

b) Déduire de ce qui précède que : pour tout  $x \in ]-\infty ; 0]$ ,  $g(x) \geq 0$ .

**Partie B (07,5 points)**

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{xe^x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1. a) Justifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . (On pourra s'aider de la question 1 de la partie A).

b) Étudier la continuité de  $f$  en 0.

b) Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0. En déduire les conséquences graphiques pour la courbe (C).

2. a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe (C) en  $-\infty$ .

Étudier les positions relatives de (C) par rapport à  $(\Delta)$  sur  $]-\infty ; 0]$ .

3. a) Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]-\infty ; 0]$ , puis sur  $]0 ; +\infty[$ .

(On pourra montrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe sur  $]-\infty ; 0]$ .)

b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

4. Soit I le point de (C) d'abscisse  $-1$ .

a) Montrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point I est :  $y = \frac{e}{e-1}(x + 1)$ .

b) Étudier la position de (C) par rapport à (T). (On pourra utiliser le résultat obtenu dans la question A.1).

5. Construire la courbe (C), la tangente (T) et l'asymptote  $(\Delta)$ .

**Partie C (02 points)**

1. Soit  $\alpha$  un réel tel que :  $0 < \alpha < 2$ . On désigne par  $\mathcal{A}(\alpha)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = \alpha$  et  $x = 2$ .

a) Calculer  $\mathcal{A}(\alpha)$  au moyen d'une intégration par parties.

b) Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 0.

2. On considère la courbe ( $\Gamma$ ) définie par le système :

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^t(t - \ln 2) + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Déterminer une équation cartésienne de ( $\Gamma$ ).

b) En déduire que ( $\Gamma$ ) est une partie de (C) que l'on précisera.