

Série D

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages

Exercice 1 (4 points)

Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On considère $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1) Comparer :

- a) $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$. (0,25 point)
- b) $M(-t)$ et $M(t)$. (0,25 point)
- c) $M(\pi - t)$ et $M(t)$. (0,25 point)

2) En déduire les éléments de symétrie pour la courbe (Γ) . (0,5 point)

Justifier qu'on peut réduire le domaine d'étude de (Γ) à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (0,25 point)

3) Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun pour t élément de I . (0,5 point+0,5 point)

4) a) Déterminer les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points de paramètres respectifs $0, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. (0,25 point + 0,25 point + 0,25 point)

b) Construire (Γ) et les tangentes aux points de paramètres respectifs $0, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

(Unité graphique : 4cm). (0,75 point)

Exercice 2 (4 points)

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points A, B et C tels que :

$$A(-1; 2; -3), \vec{AB} = 3\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{j}, C(0; -2; 0).$$

1) Déterminer les coordonnées du point B . (0,5 point)

2) Soit D un point de l'espace tel que $\vec{AD} = \vec{BC}$.

a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$. En déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$. (0,5 point+0,5 point)

b) Calculer les coordonnées du point D . (0,5 point)

3) Calculer (en unité de longueur) la distance :

a) d_1 du point O à la droite (AB) . (0,5 point)

b) d_2 du point O au plan (ABC) . (0,5 point)

4) Calculer (en unité de volume) le volume \mathcal{V} de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet O . (1 point)

Problème (12 points)

Partie A (4 points)

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 1 - (x^2 - 4x + 5)e^{-x+1}$

- 1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. (0,25 point + 0,25 point)
- 2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. (1,5 point + 0,5 point)
- 3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]1, 35; 1, 36[$. (1 point + 0,25 point)
b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0,25 point)

Partie B (5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 3 + (x^2 - 2x + 3)e^{-x+1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; unité 2cm.

- 1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,25 point + 0,25 point)
- 2) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout réel x , avec f' la dérivée de f en x . Etudier le sens de variation de f . (0,5 point + 1 point)
b) Dresser le tableau de variation de f . (0,25 point)
- 3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$. (0,5 point)
b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à (D) . (0,5 point)
c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1. (0,5 point)
- 4) Tracer (D) , (T) et (C) . (0,25 point + 0,25 point + 0,75 point)

Partie C (3 points)

- 1) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^\alpha (x^2 - 2x + 3)e^{-x+1} dx. \quad (2 \text{ points})$$

- 2) En déduire l'aire $A(\alpha)$ (en cm^2) du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = \alpha$, $y = 0$ et la courbe (C) . (1 point)

On donne : $e^{-0,35} \simeq 0,7$ $e^{-0,36} \simeq 0,69$ $e \simeq 2,7$ $e^{-1} \simeq 0,36$ $f(\alpha) \simeq -0,2$

Fin