

EXERCICE 1 (4 points)

Une urne contient N boules indiscernables au toucher dont une porte le n° 1, deux portent le n° 2, ..., n portent le numéro n . (n est un entier naturel impair strictement supérieur à 1).

1. On tire une boule de l'urne.

Soit E l'événement « la boule tirée est un nombre pair » et F l'événement « la boule tirée est un nombre impair ».

a) Montrer que : $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) En posant $n = 2k + 1$ (k étant un entier naturel non nul), montrer que :

$$\text{Card } E = \frac{(n-1)(n+1)}{4} \text{ et } \text{Card } F = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

c) En déduire les probabilités des événements E et F .

2. On tire simultanément deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité pour que la somme des numéros portés par les deux boules soit un nombre impair.

3. Dans cette question, on prend $n = 19$.

On tire une boule de l'urne. On désigne par A l'événement « le numéro de la boule tirée est un multiple de 5 ou un multiple de 7 » et par B l'événement « le numéro de la boule tirée est impair ».

a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan (P) , soient A , B et C les sommets d'un triangle équilatéral dont la longueur d'un côté est $2d$ ($d > 0$).

1. a) Déterminer l'ensemble E des nombres réels β tels que les points A , B et C affectés des coefficients respectifs 1, β et 1 admettent un barycentre G_β .

b) Quel est l'ensemble des points G_β lorsque β parcourt E ?

2. On prend $\beta = 1$.

a) Déterminer G_1 .

b) On pose : $f_1(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que : $f_1(M) = 8d^2$.

3. On prend $\beta = -2$.

a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur \vec{V} indépendant de M .

Déterminer \vec{V} .

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que : $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 0$.

PROBLÈME (12 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Unité graphique : 3 cm.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ et (C) sa courbe dans le plan.

Partie A (4,5 points)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.
En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .
3. Étudier la position relative de (C) et (Δ) .
4. Étudier le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variation.
5. Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) .

Partie B (4,5 points)

Pour tout x élément de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on pose : $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$

Soit α un nombre réel strictement positif.

1. Donner une interprétation géométrique de $F(\alpha)$.
2. Étudier le sens de variation de F .
3. Démontrer que pour tout t élément de l'intervalle $[1 ; 1 + \alpha]$, on a : $\frac{1}{1+\alpha} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.
4. Établir que : $\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \ln(1 + \alpha) \leq \alpha$.
5. Déduire de la question 4. que pour tout x élément de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :
 - a) $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$.
 - b) $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$.
 - c) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe et est un nombre réel l .
Établir que : $\frac{1}{2} \ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$.

Partie C (3 points)

Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$.

1.
 - a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$.
 - b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.
 - a) Exprimer S_n à l'aide de $F(n)$.
 - b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, calculer sa limite.
On donne : $\ln 2 = 0,7$.