

Exercice 1

A) On considère le polynôme p défini par $p(z) = z^3 - 3z^2 - 3z + 5 + 20i$, z étant un nombre complexe.

1. Montrer que $1 + 2i$ est une racine de p .
2. Trouver deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait $p(z) = (z - 1 - 2i)(z^2 + az + b)$.
3. En déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $p(z) = 0$.

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; on prendra 1cm pour unité graphique.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = -2 - i$ et $c = 4 - i$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 2. Soit D le point d'affixe $2 + 3i$. Montrer que A, B et D sont alignés.
- a) Calculer $\frac{b-a}{c-a}$, mettre le résultat sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.
- b) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

Exercice 2

Une entreprise achète, utilise et revend des machines après un certain nombre x_i d'années. Après 6 années, l'évolution du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suit :

Nombre d'année x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de	150	125	90	75	50	45

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique.
(On prendra 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 20 000 FCFA en ordonnée.)
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (x_i, y_i) ainsi définie.
3. En utilisant la méthode des moindres carrés, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x de cette série statistique.
4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Problème

Le problème comporte trois parties A, B et C obligatoires.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie pour tout $x \neq -2$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x+2}.$$

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1 ; +\infty[$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

4. Tracer, dans le même repère, la courbe (\mathcal{C}) représentative de la fonction f , et la courbe (\mathcal{C}') représentative de la fonction g^{-1} .

Partie B

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. Calculer $f''(x)$ et vérifier que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f''(x) > 0$.
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; 1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution r dans l'intervalle $[0 ; 1]$
(On ne demande pas de calculer r .)

Partie C

On considère la suite (u_n) à termes positifs, définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer par récurrence sur n que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - r| \leq \frac{2}{3} |u_n - r|$.

3. En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - r| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .