Exercice 1 /4 points

1) On considère a et b deux réels, avec a non nul.

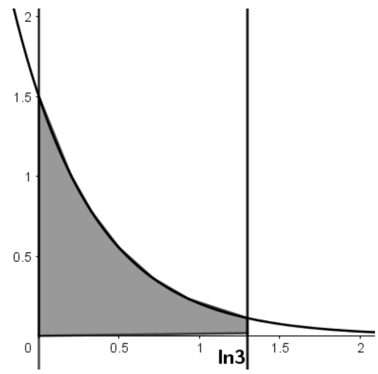
Démontrer que les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel, sont des solutions de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ (E). (On admettra par la suite que ce sont les seules). **1pt**

2) Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

a) Affirmation 1 : si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 6$, alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. **1pt**

b) Affirmation 2 : si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ alors pour tous réels α et β,
$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$. **1pt**

c) Affirmation 3 : la courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{3}{2}$. (voir figure ci-contre) ; l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln(3)$, est $\frac{2}{3}$. **1pt**



Exercice 2 /5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(0; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.

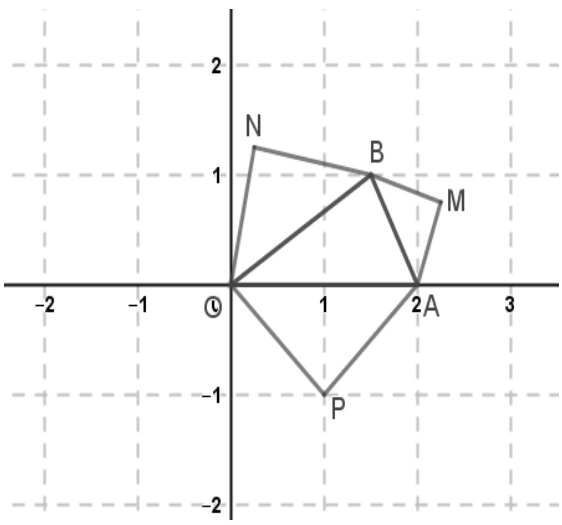
On considère les points A et B d'affixes respective $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles Isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.

On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.



1) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2. **2pts**

2) **a)** En utilisant les résultats de la question 1, donner les écritures complexes de s_1 et de s_2. **1pt**

b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N. **1pt**

c) donner par lecture graphique, l'affixe z_P du point P, puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. **1pt**

PROBLÈME **/ 11 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

A. Étude de la fonction f et construction de la courbe (C).

1) Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x}$). **0,5pt**

2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ. **0,75pt**

3) **a)** Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f. **0,5pt**

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant les limites de la fonction f' en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,75pt**

c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x. **0,75pt**

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f. **0,75pt**

4) Soit I l'intervalle [1,9 ;2]. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. **0,75pt**

5) Tracer la droite Δ et la courbe (C) (unité graphique : 2cm). **1pt**

B. Recherche d'une approximation de α.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + ln(2 + \frac{1}{x})$.

1) Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$. **0,5pt**

2) Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I. **1,5pt**

3) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$. **0,75pt**

4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
On déduit de la question B 2) que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. on ne demande pas de le démontrer.

a) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$. **0,75pt**

b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de $\mathbb{N}$,

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$. **1pt**

c) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite. **0,75pt**