

EXERCICE 1 (5 points)

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe : $3 + 4i$. 0,5pt
2. On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $Z^3 - (5 + 3i)Z^2 + (5 + 8i)Z - 1 - 5i = 0$
 - a. Montrer que l'équation (E) admet une unique racine réelle Z_0 que l'on déterminera. 0,5pt
 - b. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E). 1pt
3. Dans le plan affine euclidien, on considère le triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que : $AB = AC = a$ (avec $a > 0$).
 - a. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 4) ; (B, -1) et (C, -1) 0,5pt
 - b. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que : $4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2a^2$. 1,5pt
(On ne demande pas la construction de l'ensemble (E_1))
4. Le plan affine est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A (1 ; 0), B (1 ; -3) et C (-2 ; 0).
 - a. Déterminer la forme complexe de la similitude directe S de centre A, qui transforme B en C. 0,5pt
 - b. Déduire les éléments caractéristiques de S. 0,5pt

EXERCICE 2 (4 points)

I. Un atelier comporte deux machines M_1 et M_2 fonctionnant de manière indépendante. Les probabilités de défaillance de chacune de ces machines sont respectivement 0,02 pour M_1 et 0,03 pour M_2 .

On considère les événements suivants :

A : « la machine M_1 est défaillante »

B : « la machine M_2 est défaillante »

Déterminer les probabilités :

- a. P_1 d'avoir les deux machines défaillantes. 0,75pt
- b. P_2 d'avoir une seule machine défaillante. 0,75pt

II. L'on a étudié au cours d'un certain nombre d'années le capital de cet atelier en milliards de francs CFA et ses dépenses en publicité en millions. On obtient le tableau ci-dessous :

Capital (x_i)	13	9	10	15	18	11	6
Dépenses en publicité (y_i)	2,5	1,7	1,9	2,8	1,53	2,1	1,1

- a. Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal. 1pt
- b. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. 0,5pt
- c. Déterminer la covariance de x et y notée $cov(x,y)$. 1pt

PROBLEME (11 points)

La partie C est indépendante des autres parties.

Partie A : (5,5points)

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

1. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation. 2pts
2. Déterminer les asymptotes de la courbe (C) de f . 0,5pt
3. Montrer que le point I(1 ; -1) de rencontre des asymptotes est centre de symétrie de (C). 1pt
4.
 - a. Tracer (C) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , (unité sur les axes : 1 cm). 1pt
 - b. Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), les droites d'équations $y = x - 2$; $x = -1$ et l'axe des ordonnées. 1pt

Partie B : (2,5points)

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 10 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n \geq 3$. 1 pt
2.
 - a. Montrer que la suite (U_n) est décroissante. 0,5pt
 - b. (U_n) est elle convergente ? Justifier votre réponse. 0,25pt
3.
 - a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(a) = a$. 0,25pt
 - b. Trouver la limite de (U_n) quand n tend vers l'infini. 0,5pt

Partie C : (3points)

On considère l'équation différentielle (D) : $y'' + 2y' + y = -x - 2$

1. Déterminer une fonction affine g solution de (D). 1pt
2. Montrer qu'une fonction h deux fois dérivable sur \mathbb{R} est solution de (D) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de l'équation différentielle (D') : $y'' + 2y' + y = 0$. 0,5pt
3. Résoudre l'équation différentielle (D') et en déduire la solution h de (D) vérifiant
$$\begin{cases} h(0) = -1 \\ h'(0) = -1 \end{cases}$$
 1,5pt

Junon 2020