UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Séries C-E

Année 2020
Session Normale
Epreuve du $2^{ème}$ tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages

(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (4 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x, y)$ de ce plan.

On considère le nombre complexe z' tel que

$z' = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\overline{z} - 1$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

1) Déterminer les équations des ensembles suivants :

a) (C_1) : ensemble des points M tels que $|z'| = 1$. (0,75 point)

b) (C_2) : ensemble des points M tels que la partie réelle de z'^2 soit égale à 1. (0,75 point)

c) (C_3) : ensemble des points M tels que la partie imaginaire de z'^2 soit égale à 1. (0,75 point)

2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (C_1), (C_2) et (C_3) en précisant les éventuels centre ; grand axe, petit axe, sommets et équations des asymptotes. (1,75 point)

Exercice 2 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 10 = 0$ et soit les points $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ et $C(5; 4; -6)$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R. (0,75 point)

2) a) Montrer que A, B et C déterminent un plan P. (0,5 point)

b) Vérifier qu'une équation de P est : $x + y + z - 3 = 0$. (0,25 point)

3) a) Montrer que l'intersection de S et P n'est pas vide. (0,5 point)

b) S coupe donc P suivant un cercle C de centre J et de rayon r.

On rappelle que J est le projeté orthogonal de I sur le plan P.

Déterminer les coordonnées de J et calculer r. (1 point)

4) Soit le plan Q d'équation $2x - y + 2z + 13 = 0$.

Montrer que le plan Q est tangent à la sphère S au point $H(\frac{-5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{-14}{3})$. (1 point)

Problème (12 points)

A tout réel $m \neq 1$, on associe la fonction f_m de la variable réelle x définie par :

$$f_m(x) = \frac{2(1-m)e^x - m - 1}{(1-m)e^{2x}}.$$

On appelle (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On fera trois figures séparées pour les parties A, B et C.

Partie A : (3 points)

Dans cette partie, on suppose $m = -1$.

1) a) Calculer les limites de f_{-1} en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 point)

b) Etudier le sens de variation de f_{-1} puis dresser son tableau de variation. (0,75 point)

c) Construire la courbe (C_{-1}). (0,5 point)

2) a) Justifier que f_{-1} admet une bijection réciproque f_{-1}^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition, l'ensemble des valeurs et le sens de variation. (0,5 point)

b) Calculer $f_{-1}^{-1}(x)$. (0,25 point)

c) Construire la courbe (C'_{-1}) représentative de f_{-1}^{-1}. Justifier la construction. (0,5 point)

Partie B : (4 points)

On suppose maintenant $m = 0$.

1) a) Calculer les limites de f_0 en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 point)

b) Etudier le sens de variation de f_0 puis dresser son tableau de variations. (1 point)

c) Construire la courbe (C_0). (0,25 point)

2) a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel k, le nombre de racines de l'équation : $ke^{2x} + 2e^x - 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$. (0,75 point)

b) En déduire le nombre de tangentes à la courbe (C_0) ayant un coefficient directeur k ; discuter selon la valeur du réel k. (0,75 point)

c) Ecrire les équations des tangentes à (C_0) de coefficients directeurs respectifs $-\frac{1}{2}$ et 4, et indiquer les coordonnées des points de contact. (0,5 point)

3) Déterminer l'aire du domaine plan, ensemble des points M dont les coordonnées x et y sont telles que : $-\ln 2 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f_0(x)$. (0,25 point)

Partie C : (2 points)

Dans cette partie, $m = -2$.

1) a) Calculer les limites de f_{-2} en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5 point)

b) Etudier le sens de variation de f_{-2} puis dresser son tableau de variations. (0,75 point)

c) Construire la courbe (C_{-2}). (0,25 point)

2) a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe (C_{-2}), l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$ avec $\lambda > 0$. (0,25 point)

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$. (0,25 point)

Partie D : (3 points)

Dans cette partie, m décrit $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Discuter, selon m, le sens de variation de f et dresser les tableaux de variations correspondants.

Fin