

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

**Exercice 1 (4 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique 1 cm. On considère le polynôme  $p(z)$  défini pour tout nombre complexe  $z$  par :

$$p(z) = z^3 - (4 - 2i)z^2 + (8 - 2i)z - 20.$$

- 1) Montrer que l'équation  $p(z) = 0$  admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera. (0,5 point)
- 2) a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ ,  $p(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$ . (0,5 point)  
b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $p(z) = 0$ . (0,5 point)
- 3) Soit E, F et G les points d'affixes respectives  $z_E = 3 - i$  ;  $z_F = 1 - 3i$  et  $z_G = 2i$ .  
a) Placer les points E, F et G dans le plan. (0,5 point)  
b) Ecrire le nombre complexe  $\frac{z_F - z_E}{z_G - z_E}$  sous forme algébrique. (0,5 point)  
c) En déduire la nature du triangle  $EF G$ . (0,25 point)
- 4) Déterminer l'affixe  $z_H$  du point H image du point G par la translation de vecteur  $\vec{EF}$ . (0,5 point)
- 5) En déduire la nature exacte du quadrilatère  $EFHG$ . (0,25 point)
- 6) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M d'affixe  $z$  tel que  $\frac{z - 3 + i}{z - 1 + 3i}$  soit imaginaire pur. (0,5 point)

**Exercice 2 (4 points)**

Une urne contient 10 boules dont 6 rouges, 3 vertes et une noire indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules de cette urne.

- 1) Calculer les probabilités des événements suivants :  
A : «avoir trois boules rouges». (0,5 point)  
B : «avoir deux boules vertes». (0,5 point)  
C : «avoir trois boules de couleurs différentes». (0,5 point)  
D : «avoir au moins une boule verte». (0,5 point)  
E : «aucune boule noire dans le tirage». (0,5 point)
- 2) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges obtenues au cours du tirage.  
a) Déterminer la loi de probabilité de X. (0,5 point)  
b) Calculer l'espérance mathématique de X. (0,5 point)

3) On considère qu'on gagne si l'on obtient la boule noire dans le tirage. On répète l'opération cinq fois de suite et on considère la variable aléatoire  $Y$  correspondant au nombre de fois qu'on gagne.

- a) Montrer que  $Y$  suit une loi binomiale. (0,25 point)
- b) Calculer l'espérance mathématique de  $Y$ . (0,25 point)

**Problème (12 points)**

**Partie A (7 points)**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = x - \sqrt{x^2 - x}, & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = x^2 \ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 cm.

- 1) Etudier la continuité de  $g$  en 0. (0,5 point)
- 2) Etudier la dérivabilité de  $g$  en 0, puis interpréter graphiquement le résultat. (0,5 point)
- 3) Etudier les variations de  $g$ . (1 point)
- 4) a) Montrer que la droite  $(\Delta) : y = 2x - \frac{1}{2}$  est une asymptote à  $(C_g)$  au voisinage de  $-\infty$ . (1 point)
- b) Etudier la position relative de  $(C_g)$  et  $(\Delta)$ . (0,5 point)
- c) Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  puis dresser son tableau de variation. (1,5 point)
- 5) Construire la courbe  $(C_g)$  et la droite  $(\Delta)$ . (2 points)

**Partie B (5 points)**

Soit  $f$  l'application définie par :  $f : ]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto f(x) = g(x)$

- 1) Justifier que  $f$  est bijective de  $]-\infty, 0]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera. On notera  $f^{-1}$  la réciproque de  $f$ . (0,5 point)
- 2) a) Montrer que pour  $x \in J$ ,  $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ . (0,5 point)
- b) Dédurre du tableau de variation de  $f$  celle de  $f^{-1}$ . (0,25 point)
- 3) On note  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f^{-1}$ .
  - a) En utilisant la Partie A 4) a) Montrer que  $(\Gamma)$  admet une asymptote  $(D)$  dont on précisera une équation. (0,5 point)
  - b) A partir de la courbe représentative de  $f$ , justifier comment on peut déduire celle de  $(\Gamma)$ . (0,25 point)
  - c) Construire la courbe  $(\Gamma)$  dans le même repère que  $(C_g)$ . (1 point)
- 4) a) Déterminer les réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que :  $f^{-1}(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x-1}$ . (0,5 point)
- b) Donner une primitive  $F$  de  $f^{-1}$ . (0,5 point)
- 5) a) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A_1$  de l'ensemble  $E_1$  des points  $M(x, y)$  tels que 
$$\begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ -1 \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$$
. (0,5 point)
- b) Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $A_2$  de l'ensemble  $E_2$  des points  $M(x, y)$  tels que 
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$$
. (0,5 point)

On donne :  $\frac{1}{e} = 0,38$

Fin