UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

....

Office du Baccalauréat

....

Série D

Année 2020
Session de Remplacement
Epreuve du $2^{ème}$ tour
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

Deux personnes A et B font feu indépendamment sur une cible. La probabilité pour A de toucher la cible est estimée à $\frac{4}{5}$, la probabilité pour B est $\frac{3}{4}$. Quelle est la probabilité pour :

1) que les deux tireurs touchent tous deux la cible ? (0,5 point)
2) que tous deux manquent la cible ? (0,5 point)
3) que la cible soit atteinte par A seulement ? (0,5 point)
4) que la cible soit atteinte par B seulement ? (0,5 point)
5) que la cible soit touchée par un tireur seulement ? (0,5 point)
6) que la cible soit atteinte ? (0,5 point)
7) que la cible soit touchée par un tireur au moins ? (1 point)

Exercice 2 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A(1;0;2) ; B(0;0;1) et C(0;-1;1)

1) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. (0,5 point)
2) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. (0,75 point)
   b) En déduire l'aire du parallélogramme ABCD. (0,5 point)
3) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ puis AB et AC. (0,75 point)
   b) En déduire la nature exacte du parallélogramme ABCD. (0,5 point)
4) a) Calculer la distance d en unité de longueur du point O au plan P passant par A, B et C. (0,5 point)
   b) Calculer le volume V en unité de volume de la pyramide de sommet O et de base ABCD. (0,5 point)

Problème (12 points)

Partie A (7,5 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{2x-2}$. On note (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 5 cm comme unité.

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. (0,5 point)
   b) Vérifier que pour tout réel, $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2}\left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$. (0,5 point)
   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0,5 point)

2) Déterminer f', la fonction dérivée de f. Etudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f. (2 points)

3) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C). (0,5 point)
b) Etudier la position relative de (C) et (Δ). (0,5 point)

4) On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C). (0,5 point)

5) a) On note I l'intervalle $[0; 0,5]$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution qu'on notera par α (0,75 point)
b) Construire la courbe (C), l'asymptote (Δ) et la tangente (T). (1,75 point)

Partie B (4,5 points)

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{2u_n - 2} \end{cases}$

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x-2}$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$. (0,75 point)

2) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a $|g'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$. (1 point)

3) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x) \in I$. (0,5 point)

4) Utiliser l'inégalité de la moyenne pour démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$. (0,75 point)

5) Démontrer que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$. (0,5 point)

6) En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite. (0,5 point)

7) Déterminer un entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-5}$. (0,5 point)

Données : $\ln 2 \simeq 0,7$; $e^{-1} \simeq 0,37$; $e^{-2} \simeq 0,14$; $\ln 10 \simeq 2,3$.

Fin