Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2014	**Session :** normale
Série : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On note B et C les points du plan d'affixes respectives $3 - 2i$ et $5 + i$.
On désigne par S la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

1. *a*) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

c) Déterminer l'affixe du point D qui a pour image le point C par S.

2. *a*) Justifier que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par S est $\frac{1}{2}(1-5i)$.

b) Justifier que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

3. On définit les points suivants : $B_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_{n+1} = S(B_n)$.

On note z_n l'affixe du point B_n.

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$.

b) Calculer la distance OB_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} OB_n$.

Exercice 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le ministère du plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003.
Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1cm)

On prendra pour origine le point $\Omega(0\,;24)$.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (X, Y).

3. Justifier que :

a) La variance de X est $\frac{20}{3}$.

b) La covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$.

4. *a*) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5. Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.
a) Déterminer une équation de (D).
b) Tracer (D).
6. On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes.
Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont des nombres réels.
Dans le plan muni du repère (O, l, J), on désigne par :
($\mathscr{C}$) la courbe représentative de g ; (D) la droite d'équation $y = x$.
1. *a*) On donne: $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b.
b) On admet que la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D).
Déterminer la valeur de a.
2. Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{x} - x$.
a) Soit h' la dérivée de h.
Calculer $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$.
b) Dresser le tableau de variation de h.
On ne calculera pas les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$.
1. *a*) Calculer la limite de f en $-\infty$.
b) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.
c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.
2. *a*) Calculer la limite de f en $+\infty$.
b) Démontrer que (D) est une asymptote à ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.
c) Étudier les positions relatives de ($\mathscr{C}$) et (D).
3. *a*) On désigne par f' la fonction dérivée de f.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}h(x)$.
b) Déterminer le sens de variations de f.
c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Construire sur le même graphique (T), ($\mathscr{C}$) et (D).
5. *a*) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $(f^{-1})'(1)$.
c) Construire (Γ), la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que ($\mathscr{C}$).

Partie C

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t}\,dt.$

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = (-2-n)e^{-n} + e.$

2. Calculer l'aire $\mathscr{A}_n$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n$.