Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2015	**Session :** normale
Série : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

Exercice 1

Partie I

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$.

1. *a*) Calculer P(*i*).

b) Déterminer deux nombres complexes *a* et *b* tels que : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) : P(*z*) = 0.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 5 cm.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. *a)* Calculer z_1 et z_2.

b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2. On considère la suite *U* définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.

b) Démontrer que *U* est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprimer U_n en fonction de *n*.

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$.)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

a) Calculer l_n.

b) En déduire la limite de l_n.

Exercice 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4 ;

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

b) Démontrer que la probabilité *p*(B) de l'évènement B est 0,58.

c) Mariam réalise un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.
On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.
2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.
a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0{,}42)^n$.
b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$.

Problème

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.
Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$.
1. Démontrer que g est solution de l'équation (E).
2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.
a) Démontrer qu'une fonction ¨ est solution de (E) si et seulement si ¨ $-\ g$ est solution de (F).
b) Résoudre l'équation différentielle (F).
c) En déduire la solution ¨ de (E) qui vérifie ¨(0) $= -\dfrac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}e^{-x}$.
On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques OI = 2 cm et OJ = 4 cm.
1. *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
b) Démontrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3. *a*) soit f' la fonction dérivée de f.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{3 + 2x - x^2}{2}e^{-x}$.
b) Étudier les variations de f.
c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0 est :
$y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$.
5. Étudier les positions relatives de ($\mathscr{C}$) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et ($\mathscr{C}$).

Partie C

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

2. *a*) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**).

b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$.

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite(OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.