Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : C	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)-n\ln(n)}{n}$$

1- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,
$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$.

2- *a)* Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \le k \le n-1$,
$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$
(*On pourra utiliser un encadrement de* $\ln(x)$ *sur l'intervalle* $\left[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}\right]$.)

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln x\,dx \le u_n$.

3- Sachant que $\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln(2) - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. L'unité graphique est 2 cm.

1- On note $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z ($z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) tels que : $14z\bar{z} + 16i(z - \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$.
Démontrer que M appartient à $(\mathscr{C})$ si et seulement si : $3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$.

2- *a)* Justifier que $(\mathscr{C})$ est une ellipse. On note Ω son centre.
b) Préciser les coordonnées de Ω.
c) Déterminer une équation de l'axe focal de $(\mathscr{C})$.
d) On note A, A', F et F' les points d'affixes respectives
$\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i,\ \frac{2\sqrt{3}}{3} + i,\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ et $\frac{\sqrt{3}}{3} + i$.
Justifier que A et A' sont les sommets de $(\mathscr{C})$ situés sur son axe focal.
Justifier que F et F' sont les foyers de $(\mathscr{C})$.

3- Construire l'ellipse $(\mathscr{C})$.

4- On considère l'hyperbole (H) de foyers A et A' et de sommets F et F'.
a) Démontrer qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est :
$$3x^2 - y^2 = 1.$$
b) Tracer les asymptotes de (H).
c) Construire (H).

$\boxed{\textbf{PROBLÈME}}$

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) tel que : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2$ cm.

On considère la fonction dérivable sur ℝ* et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|.$$

1- *a)* Calculer la limite de *f* en 0.

b) Calculer les limites de *f* en +∞ et en -∞.

c) Démontrer que *f* est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{1}{4}\right[$ et $]0\,;+\infty[$, et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}\,;0\right[$.

d) Dresser le tableau de variations de *f*.

2- Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $3 < \alpha < 4$.

3- Démontrer que :

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,\alpha[,\ f(x) < 0$;

$\forall\, x \in\,]\alpha\,;+\infty[,\qquad f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction *h* dérivable sur ℝ* et définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2\ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- *a)* Démontrer que *h* est dérivable en 0.

b) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = xf(\frac{1}{x})$.

c) Démontrer en utilisant A-3) que :

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;\,0[\,\cup\left]0\,;\,\frac{1}{\alpha}\right[,\ h'(x) > 0$;

$\forall\, x \in \left]\frac{1}{\alpha}\,;+\infty\right[,\qquad h'(x) < 0$.

2- On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de *h* à l'intervalle $[-1\,;\frac{3}{2}]$ dans le plan muni du repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

a) Tracer la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe (Γ). (*On prendra : α = 3,6*).

3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle]0 ; 1[.

a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda$.

b) On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite de repère $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Déduire de la question précédente que :

$\mathscr{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda)\right)$ cm².

c) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie C

On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1- Soit g la fonction dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln(x)$.

a) Étudier les variations de g.

b) Démontrer que l'image de l'intervalle [3 ; 4] par g est contenue dans l'intervalle [3 ; 4].

c) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) = x$.

2- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3 \le u_n \le 4$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$ sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout x élément de [3 ; 4], on a : $|g'(x)| \le \frac{1}{12}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n,

$|u_{n+2} - u_{n+1}| \le \frac{1}{12}|u_{n+1} - u_n|$, puis que $|u_{n+1} - u_n| \le \frac{1}{12^n}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{12^n}$.

En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.