| | | |
|---|---|---|
| **Pays :** Côte d'Ivoire | **Année :** 2016 | **Session :** Mathématiques |
| **Série :** D | **Durée :** 4 h | **Coefficient :** 4 |

## EXERCICE 1

**1-** On considère la fonction $h$ dérivable et définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $h(x) = 2x - x^2$.

*a)* Démontrer que $h$ est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

*b)* En déduire que l'image de l'intervalle [0 ; 1] par $h$ est l'intervalle [0 ; 1].

**2-** Soit $u$ la suite définie par :

$u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

*a)* Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

*b)* Démontrer que la suite $u$ est croissante.

*c)* Justifier que la suite $u$ est convergente.

**3-** On considère la suite $v$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1 - u_n)$.

*a)* Démontrer que $v$ est une suite géométrique de raison 2.

*b)* Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

*c)* Calculer la limite de la suite $v$.

*d)* En déduire la limite de la suite $u$.

## EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), (unité graphique : 2 cm).
On considère la transformation $\mathcal{S}$ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**1-** *a)* Soit Ω le point d'affixe 2.
Vérifier que : $\mathcal{S}$ (Ω) = Ω.

*b)* Justifier que $\mathcal{S}$ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

**2-** *a)* Démontrer que : $\forall\, z \neq 2$, $\frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

*b)* En déduire que le triangle MΩM'est rectangle en M.

*c)* Donner un programme de construction de l'image M' par $\mathcal{S}$ d'un point M donné.

**3-** *a)* Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$
dans le plan muni du repère (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Construire les images respectives A' et B' de A et B par $\mathcal{S}$.

*b)* On note $z_A$, $z_B$, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'.
Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

*c)* En déduire la nature du quadrilatère AA'BB'.

# PROBLÈME

## Partie A

Soit $g$ la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x + 3}$.

**1-** Calculer les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**2-** *a)* Soit $g'$ la fonction dérivée de $g$.
Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (4x - 6)e^{-2x + 3}$.
*b)* Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de $x$.
*c)* Justifier que : $g(\frac{3}{2}) = -2$.
*d)* Dresser le tableau de variations de $g$.

**3-** *a)* Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée $\alpha$.
*b)* Vérifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.
c) Justifier que : $\forall x \in ]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in ]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

## Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), (unité graphique : 2 cm).
On considère la fonction $f$ dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2})e^{-2x + 3}$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$.

**1-** *a)* Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

*b)* En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

**2-** *a)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
*b)* Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
*c)* Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

**3-** *a)* Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$.
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
*b)* En déduire les variations de $f$.
*c)* Dresser le tableau de variations de $f$. On ne calculera pas $f(\alpha)$.

**4-** Construire $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ sur le même graphique.
On précisera les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses $0$ ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{3}{2}$ ; $4$.
*On prendra : $\alpha = 0{,}865$* et *$f(\alpha) = 0{,}4$.*

**5-** Soit $t$ un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire en cm$^2$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.
On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} (x - \frac{1}{2})e^{-2x + 3}\, dx$.

*a)* À l'aide d'une intégration par parties, justifier que : $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t + 3}$.
*b)* En déduire $\mathscr{A}(t)$.
*c)* Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathscr{A}(t)$.