Pays : Côte d'Ivoire	**Année :** 2016	**Session :** Mathématiques
Série : E	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$),
d'unité graphique, un centimètre.
Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M, N et P les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].
Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m, n et p.

1- Construire les triangles MNP et ABC sachant que : $m = -1 - 3i$ et $n = 2$.

2- On considère la transformation f du plan dans lui-même,
qui à chaque point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :
$z' = -\frac{1}{2}(1+i)[2-(m+n+p)]$.
Quelle est la nature de f ? Préciser ses éléments caractéristiques.

3- Soit α, β et γ les affixes respectives des points A, B et C.
Démontrer que :
a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$. En déduire que : $\alpha = n + p - m$.
b) $\beta = m - n + p$.
c) $\gamma = n - p + m$.

4- On pose : f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.
On désigne par α', β' et γ' les affixes respectives des points A', B' et C'.
a) Démontrer que : $\alpha' = (1+i)m$;
$\beta' = (1+i)n$;
$\gamma' = (1+i)p$.
b) En déduire que $\overrightarrow{MA'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et que le point A' appartient à la droite (BC).
c) Calculer $\frac{\beta'-n}{n}$ et $\frac{\gamma'-p}{p}$.
En déduire que les points B' et C' appartiennent respectivement aux droites (AC) et (AB).

5- Démontrer que les triangles A'B'C' et MNP sont semblables.

EXERCICE 2

Soit (u_n), la suite définie sur ℕ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

1- Démontrer que : $\forall\, n \in]0\,;+\infty[$, $f(x) \geq \sqrt{7}$.

2- *a)* Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{7}$.

3- *a)* Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

b) En déduire la convergence de la suite (u_n).

4- Soit ℓ la limite de la suite (u_n).

a) Démontrer que: $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.

b) Déterminer la valeur de ℓ.

5- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

6- On définit la suite (d_n) par : $\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2 \end{cases}$.

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n - \sqrt{7} \leq d_n$.

PROBLÈME

Partie A

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g_n(x) = nx + (n+1)\ln x$.

1- Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

2- *a)* Calculer $g_n'(x)$ pour x élément de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, où g_n' est la dérivée de g_n.
b) En déduire le sens de variation de g_n.

3- Démontrer que l'équation $x \in\,]0\,;+\infty[$, $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0\,;1[$.

4- Démontrer que : $g_n(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [\alpha_n\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ définie dans la partie **A** et h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$
par : $h(x) = x + \ln x$.

1- Démontrer que l'équation $x \in\,]0\,;+\infty[$, $h(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $\alpha \in\,]0\,;+\infty[$.

2- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $g_{n+1}(x) = g_n(x) + x + \ln x$.

3- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) - g_{n+1}(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n}{n+1}$.

4- *a)* Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
b) En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.

5- Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul différent de 1, f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par
$f_n(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$et $(\mathscr{C}_{f_n})$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (Unités graphiques : 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée).

1- Selon la parité de n, déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2- *a)* Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{1-\ln x}{x^3}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n-1} g_n(x)$.
b) En déduire, selon la parité de n, le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation.

3- Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $f_n(\alpha_n) = (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

4- Construire $(\mathscr{C}_{f_2})$. On prendra : $\alpha_2 \approx 0{,}6$.