R. C. I. - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours

BACCALAURÉAT
SESSION 2018

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

L'unité graphique est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère un losange OABC tel que :

$$OA = 7 \text{ et } \mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{3}.$$

E est le point du segment [OB] tel que : OE = OA.
F est le point de la demi-droite [OC) tel que : CF = EB et C∈[OF].
On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [OA], [AB], [BC] et [OC].
On désigne par (Δ) la médiatrice du segment [OA] et par (Δ') celle de [BC].

1. Fais une figure.
2. *a*) Justifie que les droites (Δ) et (Δ') sont parallèles.
   b) Justifie que le triangle OAC est équilatéral.
   c) Justifie que : OB = OF.
3. Soit R_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
   On pose : $f = R_1 o R_2$.
   a) Détermine f(O) et f(A).
   b) Démontre que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   c) Déduis de ce qui précède que : (EF) ⊥ (OA) et EF = OA.
   d) Construis le centre Ω de f.
4. *a*) Justifie qu'il existe une isométrie g et une seule telle que : g(O) = A, g(A) = C et g(C) = B.
   b) Justifie que g est un antidéplacement.
   c) Démontre que g est une symétrie glissée.
5. Dans cette partie, on se propose de caractériser la symétrie glissée g.
   Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et S la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
   a) Démontre que : g = RoS.
   b) Détermine l'axe de la symétrie orthogonale S_1 telle que : $R = S_{(AB)} \text{ o } S_1$.
   c) Déduis de ce qui précède que : $g = S_{(AB)} \text{ o } t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur que l'on caractérisera.
   d) En utilisant la relation $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JB}$, détermine les éléments caractéristiques de g.

EXERCICE 2

Dans tout cet exercice, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Démontre que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose : $A = n + 3$, $B = 2n + 1$ et $d = \text{PGCD}(A\ ;\ B)$.
a) Calcule $2A - B$ et déduis-en les valeurs possibles de d.
b) Démontre que A et B sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
c) Soient $S = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $P = 2n^2 - n - 1$.
Justifie que S et P sont divisibles par $n - 1$.

3. On pose : $\delta = \text{PGCD}\ (n(n + 3)\ ;\ 2n + 1)$.
a) Démontre que d divise δ.
b) Démontre que δ et n sont premiers entre eux.
c) Déduis des questions 3-*a*) et 3-*b*) que δ est égal à d.
d) Détermine le PGCD(S ; P) en fonction de n.

4. Détermine PGCD(S ; P) pour $n = 2016$ puis pour $n = 2017$.

PROBLÈME

Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par :
$g_n(t) = (-\frac{2}{t} + \ln t\ )^n$.

On note (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 0,5 cm.

Partie A

1. *a*) Calcule la limite de g_1 en 0.
b) Interprète graphiquement ce résultat.

2. *a*) Calcule la limite de g_1 en $+\infty$.
b) Justifie que (C_1) admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

3. On suppose que g_1 est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.
a) Démontre que g_1 est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.
On admet que l'équation $t \in\ ]0\ ;+\infty[,\ g_1(t) = 0$ admet une solution unique α telle que : $2{,}3 < \alpha < 2{,}4$.
b) Justifie que l'équation $t \in\ ]0\ ;+\infty[,\ g_1(t) = 1$ admet une solution unique β telle que : $4{,}3 < \beta < 4{,}4$.

4. Soit t un nombre réel strictement positif.
Démontre que :
a) $g_1(t) < 0 \Leftrightarrow t \in\ ]0\ ;\alpha[$;
b) $g_1(t) > 0 \Leftrightarrow t \in\ ]\alpha\ ;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

1. *a*) Calcule $\lim\limits_{t \to +\infty} g_n(t)$.

b) Démontre que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{g_n(t)}{t} = 0$ (*On pourra poser : $x = t^{\frac{1}{n}}$*).

c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. On suppose que n est pair.

a) Calcule $\lim\limits_{t \to 0} g_n(t)$.

b) Interprète graphiquement ce résultat.

3. On suppose que n est impair.

a) Calcule $\lim\limits_{t \to 0} g_n(t)$.

b) Soit t un nombre réel strictement positif.

Justifie que :

i) $g_n(t) < 0 \Leftrightarrow t \in]0\,;\,\alpha[$;

ii) $g_n(t) > 0 \Leftrightarrow t \in]\alpha\,;\,+\infty[$.

(On pourra utiliser la question 4 de la partie A).

4. On suppose que pour tout entier naturel n supérieur ou à 2, g_n est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on désigne par g'_n sa fonction dérivée.

a) Démontre que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout nombre réel strictement positif t, $g'_n(t) = n\, g'_1(t) \times g_{(n-1)}(t)$.

b) Étudie suivant la parité de n, le signe de g'_n sur $]0\,;\,+\infty[$.

c) Dresse suivant la parité de n, le tableau de variation de g_n.

Partie C

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et t un nombre réel strictement positif.

1. *a*) Exprime $g_{(n+p)}(t)$ en fonction de $g_n(t)$ et $g_p(t)$.

b) Déduis de ce qui précède que : $g_{(n+p)}(t) - g_n(t) = (g_p(t) - 1) \times g_n(t)$.

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est pair.

2. Justifie que :

a) (C_n) est au-dessus de (C_{n+1}) sur $]0\,;\,\beta[$;

b) (C_n) est au-dessous de (C_{n+1}) sur $]\beta\,;\,+\infty[$.

(On pourra utiliser la question 3 de la partie A).

3. Construis (C_2) et (C_3) dans le même repère (O, I, J).

On prendra : $\alpha = 2{,}35$ et $\beta = 4{,}35$.

4. Soit A_n l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C_n), (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

a) Justifie que, pour tout entier naturel n pair et non nul, $A_n = \displaystyle\int_1^2 (1 - g_1(t)) \times g_n(t)\,dt$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\displaystyle\int_1^2 (1 - g_1(t))\,dt$.

c) Démontre que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2g_n(2) \leq A_n \leq 2g_n(1)$.

d) Déduis de ce qui précède que pour tout entier naturel n pair et non nul, $2(1 - \ln 2)^n \leq A_n \leq 2^{n+1}$.