*R. C. I. – MENET-FP * Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - MENET-FP*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2019 **Durée : 4h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

L'unité de longueur est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre K tel que AB = 3.
On note E le milieu du segment [BC] et G le barycentre des points pondérés (A, 4), (B, –1) et (D, –1).

1. *a*) Démontre que A est le milieu du segment [KG].
   b) Justifie que : $GB^2 = \dfrac{45}{2}$.
   c) Justifie que : GB = GD.
   d) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :
   $$4MA^2 - MB^2 - MD^2 = 9.$$

2. *a*) Justifie que : $AE = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
   b) Démontre que pour tout point M du plan :
   $$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = -27 + 4\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AE}.$$
   c) Détermine et construis l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :
   $$3MA^2 - 2MB^2 - MD^2 = 63.$$

EXERCICE 2

On considère un entier naturel m dont l'écriture dans le système décimal est $\overline{abc}$.
(On rappelle que : $m = 10^2a + 10\,b + c$)

Partie A

1. Écris l'entier naturel m en base 2 dans le cas où : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.

2. On suppose que : $m \equiv 0\ [27]$.
   i) Démontre que : $10^3a + 10\overline{bc} \equiv 0\ [27]$.
   ii) Déduis-en que : $10\,\overline{bc} + a \equiv 0\ [27]$.
   iii) Justifie alors que l'entier $\overline{bca}$ est divisible par 27.

Partie B

Dans cette partie on suppose que : $a > c$.
On pose : $p = \overline{cba}$; $u = a - c$ et $d = m - p$.
1. Justifie que : $d = 99u$.

2. Déduis de la question précédente que l'entier naturel d ne peut être le carré d'un entier naturel.

3. On suppose que : $b = a + c$.
   i) Justifie que : $m = 11(10a + c)$.
   ii) Déduis-en que m et d ne sont pas premiers entre eux.

4. On suppose que : $a = b + c$.
   i) Justifie que : $d = 3^2 \times 11b$.
   ii) Justifie que : $m = 110b + 101c$.
   iii) Démontre que les entiers naturels m qui sont premiers avec d sont ceux qui vérifient à la fois : $b \neq 0$, $c \neq 0$, $b+c$ n'est pas divisible par 3 ; b et c sont premiers entre eux.
   iv) Déduis des questions précédentes, tous les entiers naturels m premiers avec d.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions f_n et F_n continues sur $\mathbb{R}$ et définies par :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction F_n dans le repère (O, I, J).
On se propose dans ce problème de donner, pour tout entier naturel n non nul, l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_n)$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. Démontre que f est une fonction impaire.

2. *a)* Calcule la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   b) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   b) Détermine le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
   c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

4. Détermine une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

5. On note g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :
   $$g(x) = -x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$
   a) Détermine le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
   b) Détermine les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (Δ). *(On pourra calculer g(0)).*

6. Construis la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) dans le plan muni du repère (O, I, J).

7. On note A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calcule A à l'aide d'une intégration par parties.

Partie *B*

1. *a*) Justifie que F_n est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontre que F_n est une fonction impaire.
   c) Étudie le sens de variation de F_n sur $[0\,;+\infty[$.

2. Soit (I_n) la suite numérique définie par :
$$I_0 = \ln(1+\sqrt{2}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$
   a) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$.
   b) Démontre que la suite (I_n) est décroissante.
   c) Démontre que la suite (I_n) est convergente.
   (*On ne demande pas de calculer la limite de (I_n)*).
   d) Vérifie que pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel t positif, on a :
$$t^{2n}\sqrt{1+t^2} = \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}}$$
   e) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \frac{2n+1}{2n+2}I_n.$$
   On remarquera que pour tout nombre réel t, $\dfrac{t^{2n+2}}{\sqrt{1+t^2}} = t^{2n+1} \times \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

   On admettra que : $I_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}I_0$.

   f) Calcule I_1 et I_2.

3. *a*) Démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = I_n + \displaystyle\int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt$.
   b) Démontre que :
$$\forall\, t \geq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall\, x \geq 1,\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{n}(x^{2n}-1) \leq \int_1^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1+t^2}}dt.$$
   c) Déduis-en la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   d) Démontre que, pour tout entier naturel non nul n, $(\mathscr{C}_n)$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en $+\infty$.
   e) Construis la courbe $(\mathscr{C}_2)$ dans le plan muni du repère (O, I, J).